**31.Касательная плоскость и нормаль к поверхности.**Пусть поверхность задана в неявном виде: F(x,y,z)=0 и пусть точка M0(x0,y0,z0) принадлежит данной поверхности. Тогда уравнение касательной плоскости к этой поверхности в точке M0 таково:F′x(M0)⋅(x−x0)+F′y(M0)⋅(y−y0)+F′z(M0)⋅(z−z0)=0(1)Уравнение нормали имеет вид:x−x0F′x(M0)=y−y0F′y(M0)=z−z0F′z(M0)(2)Если же уравнение поверхности задано в явном виде z=f(x,y), то уравнение касательной плоскости имеет вид:f′x(x0,y0)⋅(x−x0)+f′y(x0,y0)⋅(y−y0)−(z−z0)=0(3)Уравнение нормали в случае явного задания поверхности таково:x−x0f′x(x0,y0)=y−y0f′y(x0,y0)=z−z0−1(4)  
Формулы (3) и (4) легко получить из формул (1) и (2). Если z=f(x,y), то перенося z в правую часть равенства получим: f(x,y)−z=0. Обозначая F(x,y,z)=f(x,y)−z, получим: F′x=(f(x,y)−z)′x=f′x(x,y)−0=f′x(x,y). Аналогично и F′y=(f(x,y)−z)′y=f′y(x,y)−0=f′y(x,y). Что же касается последней производной (т.е. производной по переменной z), то тут нужно учесть, что выражение f(x,y) не содержит z, поэтому: F′z=(f(x,y)−z)′z=0−1=−1. Подставляя в формулы (1) и (2) вместо F′x, F′y, F′z соответственно f′x, f′y и −1 и получим формулы (3) и (4).

ДАЛЕЕ ТОЛЬКО ПРИМЕРЫ

Пример №1  
Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z=3x2y4−6xy3+5x−4y+10 в точке M0(−2;1;20).  
Решение  
Поверхность задана в явном виде, посему для нахождения уравнений касательной плоскости и нормали будем применять формулы [(3)](http://math1.ru/education/funct_sev_var/tannorm.html#f3) и [(4)](http://math1.ru/education/funct_sev_var/tannorm.html#f4). Значения x0, y0, z0 (координаты точки M0) в нашем случае таковы: x0=−2, y0=1,z0=20. Но перед тем, как переходить к решению, осуществим небольшую проверку. Убедимся, что точка M0действительно лежит на заданной поверхности. Эта проверка не является обязательной, но желательна, ибо ошибка в условиях подобных задач – дело вовсе не редкое. Подставим x=x0, y=y0 в уравнение нашей поверхности и убедимся, что z0 действительно равно 20:  
z0=3x20y40−6x0y30+5x0−4y0+10=3⋅(−2)2⋅14−6⋅(−2)⋅13−4⋅1+10=12+12−4=20.  
Проверка пройдена, точка M0 действительно лежит на заданной поверхности. Теперь найдём частные производные, т.е. z′x и z′y:  
z′x=6xy4−6y3+5;z′y=12x2y3−18xy2−4.  
Нас интересуют значения частных производных именно в точке M0, посему подставим x=x0, y=y0 в выражения частных производных:  
z′x(x0,y0)=6x0y40−6y30+5=−12−6+5=−13;z′y(x0,y0)=12x20y30−18x0y20−4=48−(−36)−4=80.  
Подставляя x0=−2, y0=1, z0=20, z′x(x0,y0)=−13, z′y(x0,y0)=80 в формулу [(3)](http://math1.ru/education/funct_sev_var/tannorm.html#f3) получим уравнение касательной плоскости:  
−13⋅(x−(−2))+80⋅(y−1)−(z−20)=0;−13x+80y−z−86=0.  
Подставляя x0=−2, y0=1, z0=20, z′x(x0,y0)=−13, z′y(x0,y0)=80 в формулу [(4)](http://math1.ru/education/funct_sev_var/tannorm.html#f4) получим уравнение нормали:  
x−(−2)−13=y−180=z−20−1;x+2−13=y−180=z−20−1.  
Ответ: Касательная плоскость: −13x+80y−z−86=0; нормаль: x+2−13=y−180=z−20−1.

Пример №2  
Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности z=5x2+y2−−−−−−−√−2xy−39 в точке M0(3;−4;z0).  
Решение  
Поверхность задана в явном виде, посему для нахождения уравнений касательной плоскости и нормали будем применять формулы [(3)](http://math1.ru/education/funct_sev_var/tannorm.html#f3) и [(4)](http://math1.ru/education/funct_sev_var/tannorm.html#f4). Значения x0 и y0 (первая и вторая координаты точки M0) заданы по условию: x0=3,y0=−4. Третью координату (т.е. z0) нужно определить самостоятельно, подставив в заданное уравнение x=x0 и y=y0:  
z0=5x20+y20−−−−−−−√−2x0y0−39=525−−√+24−39=10.  
Теперь, как и в предыдущем примере, перейдём к нахождению частных производных z′x и z′y. После того, как мы найдём эти производные в общем виде, укажем их значения при x=x0 и y=y0:  
z′x=10xx2+y2−−−−−−−√−2y;z′x(x0,y0)=10⋅332+(−4)2−−−−−−−−−√−2⋅(−4)=11;z′y=10yx2+y2−−−−−−−√−2x;z′y(x0,y0)=10⋅(−4)32+(−4)2−−−−−−−−−√−2⋅3=−10.  
Подставляя x0=3, y0=−4, z0=10, z′x(x0,y0)=11, z′y(x0,y0)=−10 в формулы [(3)](http://math1.ru/education/funct_sev_var/tannorm.html#f3) и [(4)](http://math1.ru/education/funct_sev_var/tannorm.html#f4) получим уравнения касательной плоскости и нормали:  
11⋅(x−3)+(−10)⋅(y−(−4))−(z−10)=0;11x−10y−z−63=0;x−311=y−(−4)−10=z−10−1;x−311=y+4−10=z−10−1.  
Ответ: Касательная плоскость: 11x−10y−z−63=0; нормаль: x−311=y+4−10=z−10−1.

Пример №3  
Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности 3xy2z+5xy+z2=10xz−2y+1 в точке M0(1;−2;3).  
Решение  
Перенесём все слагаемые в левую часть равенства:  
3xy2z+5xy+z2−10xz+2y−1=0.  
Обозначим F(x,y,z)=3xy2z+5xy+z2−10xz+2y−1 и применим формулы [(1)](http://math1.ru/education/funct_sev_var/tannorm.html#f1) и [(2)](http://math1.ru/education/funct_sev_var/tannorm.html#f2). Значения x0, y0 и z0 как и ранее обозначают координаты точки M0, т.е. x0=1, y0=−2, z0=3.  
Проверим, действительно ли точка M0 лежит на данной поверхности. Для этого подставим x=x0, y=y0 и z=z0 в выражение 3xy2z+5xy+z2−10xz+2y−1 и выясним, равен ли нулю полученный результат:  
3x0y20z0+5x0y0+z20−10x0z0+2y0−1=36−10+9−30−4−1=0.  
Итак, точка M0 действительно лежит на данной поверхности. Естественно, что данная проверка не является обязательной, но она крайне желательна. Перейдём к дальнейшему решению. Нам нужно найти F′x, F′y и F′z:  
F′x=3y2z+5y−10z;F′y=6xyz+5x+2;F′z=3xy2+2z−10x.  
Нас интересуют значения частных производных именно в точке M0, посему подставим x=x0, y=y0 и z=z0в выражения частных производных:  
F′x(M0)=3y20z0+5y0−10z0=−4;F′y(M0)=6x0y0z0+5x0+2=−29;F′z(M0)=3x0y20+2z0−10x0=8.  
Подставляя x0=1, y0=−2, z0=3, F′x(M0)=−4, F′y(M0)=−29 и F′z(M0)=8 в формулы [(1)](http://math1.ru/education/funct_sev_var/tannorm.html#f1) и [(2)](http://math1.ru/education/funct_sev_var/tannorm.html#f2)получим уравнения касательной плоскости и нормали:  
−4⋅(x−1)−29⋅(y−(−2))+8(z−3)=0;−4x−29y+8z−78=0.x−1−4=y−(−2)−29=z−38;x−1−4=y+2−29=z−38.  
Ответ: Касательная плоскость: −4x−29y+8z−78=0; нормаль: x−1−4=y+2−29=z−38.